Trabajo Práctico Nro. 1

Números Complejos

1. Comprobar que $\dfrac{1+2i}{3-4i}+\dfrac{2-i}{5i}=-\dfrac{2}{5}$

2. Efectuar las operaciones indicadas:

   (a) $(\frac{1}{2}+i3)+(1+i\frac{3}{4})$ (b) $(\frac{1}{3}+i)-(2-i\frac{1}{4})+(-\frac{5}{4}+i2)$ (c) $i\sqrt{2}+(1+i\sqrt{2})$

   (d) $(2-i\sqrt{3}2).(2+i\frac{3}{2})$ (e) $(i3).(i2).(-i)$ (f) $(3+i4):(5-i2)$

   (g) $(i\frac{2}{3}):(1-i6)$ (h) $(1-i)^2$ (i) $(-i2)^7$

3. Determinar el módulo de cada una de las siguientes expresiones:

   (a) $2+i\sqrt{5}$ (b) $\dfrac{(2+i\sqrt{5})(1+i)}{(2-i4)}$

4. Hallar una representación trigonométrica de los siguientes números complejos:

   (a) $2-i2$ (b) $i3$ (c) $-\sqrt{3}+i3$ (d) $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

   y calcular el argumento principal de cada uno de ellos.

5. Expresar en forma binómica $(a+ib)$ los siguientes números complejos:

   (a) $2\,\mathrm{cis}(3)$ (b) $2\,\mathrm{cis}(\frac{10}{3}\pi)$ (c) $-\dfrac{2}{1+\sqrt{3}i}$ (d) $(\sqrt{3}+i)^6$

   notación: $\mathrm{cis}(\theta)=\cos(\theta)+i\mathrm{sen}(\theta)$

6. Verificar que $\dfrac{(1-i)^{49}(\cos(\frac{\pi}{40})+isen(\frac{\pi}{40}))^{10}}{(8i-8\sqrt{3})^6}=-\sqrt{2}$

7. Siendo $w_1=1+i$, $w_2=i$ y $w_3=-1-i$, calcular $\mathrm{Arg}(w_i)$, $\mathrm{Arg}(w_i\cdot w_j)$ y $\mathrm{Arg}(w_i/w_j)$ para $i,j=1,2,3$.

8. Probar que $\forall\ z,\,w\in\mathbb{C}$ vale que:

   (a) $\mathrm{Re}(kz)=k\,\mathrm{Re}(z),\quad k\in\mathbb{R}$
   (b) $\mathrm{Im}(z-w)=-\mathrm{Im}\,(w-z)$
   (c) $\mathrm{Im}(iz)=\mathrm{Re}(z)$
   (d) $\mathrm{Re}(iz)=-\mathrm{Im}(z)$
   (e) $\mathrm{Re}(z\cdot w)=\mathrm{Re}(\overline{z}\cdot\overline{w})$
   (f) $\overline{z\overline{w}}=\overline{z}w$
   (g) $\overline{iz}=-i\overline{z}$
   (h) $z\cdot\overline{w}+\overline{z}\cdot w=2\ \mathrm{Re}(z\cdot\overline{w})=2\ \mathrm{Re}(\overline{z}\cdot w)$

(i) $\mathrm{Im}(z+w)=0 \wedge \mathrm{Re}(z+w)=2\,\mathrm{Re}(z) \implies z=\overline{w}$

(j) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)>0 \iff \mathrm{Re}(z)>0$

(k) $|z|\sqrt{2} \geqslant |\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|$

9. Comprobar e interpretar geométricamente.

(a) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ (b) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$ (c) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
(d) $\overline{z_1/z_2}=\overline{z_1}/\overline{z_2},\ z_2\neq 0$ (e) $|z|=|\overline{z}|$ (f) $z\cdot\overline{z}=|z|^2$
(g) $z+\overline{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$ (h) $z-\overline{z}=i\,2\,\mathrm{Im}(z)$ (i) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$
(j) $|z_1/z_2|=|z_1|/|z_2|,\ z_2\neq 0$ (k) $|\mathrm{Re}(z)|\leqslant|z|$ (l) $|\mathrm{Im}(z)|\leqslant|z|$
(m) $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$ (n) $|z_1+z_2|\geqslant\Big||z_1|-|z_2|\Big|$ (o) $|z_1-z_2|\geqslant\Big||z_1|-|z_2|\Big|$
(p) $\arg(z_1\cdot z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)$
(q) $\arg(z_1/z_2)=\arg(z_1)-\arg(z_2),\ z_2\neq 0$
(r) $\mathrm{Arg}(z_1\cdot z_2)=\mathrm{Arg}(z_1)+\mathrm{Arg}(z_2)+2m\pi$ para un único $m\in\mathbb{Z}$
(s) $\mathrm{Arg}(z_1/z_2)=\mathrm{Arg}(z_1)-\mathrm{Arg}(z_2)+2m\pi$ para un único $m\in\mathbb{Z},\ z_2\neq 0$

¿Cómo se determina m en (r) y (s)?

10. Mostrar que:

(a) si $|z|=2 \implies |\mathrm{Im}(1-\overline{z}+z^2)|\leqslant 7$
(b) si $|z|=2 \implies |z^2+1|\geqslant 3$
(c) si $|z|=3 \implies \dfrac{5}{13}\leqslant\left|\dfrac{2z-1}{4+z^2}\right|\leqslant\dfrac{7}{5}$

11. Resolver:

(a) $z^2=2i$ (b) $z^2=1-\sqrt{3}i$
(c) $z^2=-16$ (d) $z^4=-8-8\sqrt{3}i$
(e) $z^n=1 \quad (n\in\mathbb{N})$ Nota: las soluciones de (e) se llaman las raíces enésimas de la unidad.

12. Hallar y representar gráficamente:

(a) $i^{\frac{1}{2}}$ (b) $(1-i)^{-\frac{1}{4}}$ (c) $(243)^{\frac{1}{5}}$ (d) $1^{\frac{1}{3}}$

13. Explicar el significado geométrico de las siguientes relaciones. Representar gráficamente:

(a) $|z-z_0|=R \quad (R>0)$
(b) $\arg(z-z_0)=\alpha \quad (-\pi<\alpha\leqslant\pi)$
(c) i) $\mathrm{Re}(z)=c$; ii) $\mathrm{Im}(z)=c \quad (c\in\mathbb{R})$
(d) $|z-z_1|=|z-z_2|$
(e) $|z-1|+|z+1|=a \quad (a>2)$
(f) $|z-i|=\mathrm{Im}(z)+1$
(g) $\big||z-1|-|z+1|\big|=\sqrt{5}-1$
(h) $|z-1|-|z+1|=\sqrt{5}-1$

14. Hallar y representar cada uno de los siguientes conjuntos:

   (a) $A = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > -1\}$

   (b) $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Re}(iz) < 1\}$

   (c) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq 1\}$

   (d) $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$

   (e) $A = \{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{6} < \arg(z) < \frac{2\pi}{3}\}$

   (f) $A = \{z \in \mathbb{C} : |\text{Re}(z)| \leq 3,\ |\text{Im}(z)| > 2\}$

   (g) $A = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) + \text{Im}(z) < 1\}$

   (h) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z-2i| \leq 4 \ \text{ y } \ 0 \leq \text{Im}(z) \leq 2\}$

   (i) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq |\text{Re}(z)| + 2\}$

   (j) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq \text{Im}(z)\}$

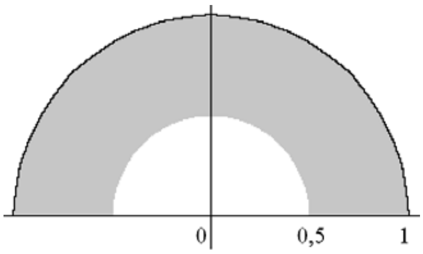
   (k) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| + |z+i| \leq 2\}$

   (l) $A = \{z \in \mathbb{C} : 2\sqrt{2} < |z-1| + |z+1| < 3\}$

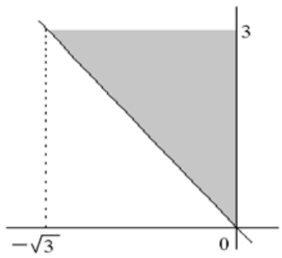
   Determinar, en cada caso, si el conjunto es abierto, cerrado y/o acotado. Describir su frontera.

15. Describir los conjuntos de números complejos cuyos diagramas se indican a continuación

   a)



   b)



   c)